9 дәріс. Тақырыбы: Векторлардың скаляр көбейтіндісі.

Векторлардың скаляр көбейтіндісі.Скалярлық көбейтіндіні координаталар арқылы өрнектеу.

Векторлардың скаляр көбейтіндісі.Скалярлық көбейтіндіні координаталар арқылы өрнектеу.

Анықтама. Екі вектордың **скаляр көбейтіндісі** деп, осы векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыш косинусының көбейтіндісіне тең болатын санды (скаляр) айтады. $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлардың скаляр көбейтіндісін $\bar{a}\cdot\bar{b}$ немесе $(\bar{a},\bar{b})$ деп белгілейді.

Анықтама бойынша

$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, \quad \varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}})$ (5.1)

Ескерту. Механикада векторлардың скаляр көбейтіндісінің жәрдемімен берілген $\bar{F}$ күші бойынша $\bar{s}$ орын ауыстырудағы A жұмысы есептелінеді (5.1-сурет).

$A = \bar{F}\cdot\bar{s}$

Сурет.

Егер $|\bar{a}|\cos\varphi = Пр_{\bar{b}}\bar{a}, \quad |\bar{b}|\cos\varphi = Пр_{\bar{a}}\bar{b}$ болатынын ескерсек, онда екі вектордың скаляр көбейтіндісі былай жазылады:

$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|Пр_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|Пр_{\bar{a}}\bar{b}$ (5.2)

Скаляр көбейтіндінің қасиеттері. Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің негізгі қасиеттерін атап өтейік.

1^0. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$ - орын ауыстырымдылық заңы;

2^0. $(\alpha\bar{a},\bar{b}) = (\bar{a},\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a},\bar{b})$ - нақты сан бойынша терімділік заңы;

3^0. $(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c})$ - қосынды бойынша үлесімділік заңы;

4^0. $(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2 > 0$ егер $\bar{a} \neq \bar{0}$ - скаляр квадрат деп аталады.

5^0. $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ болса, онда екі вектордың біреуі нөльдік вектор немесе олардың арасындағы бұрыш – тік, яғни өзара перпендикуляр.

Келтірілген 1^0 және 4^0 қасиеттердің дәлелдеуіне формула бойынша көз жеткізу қиынға соқпайды.

2^0-қасиетті дәлелдеу үшін, тағы да скаляр көбейтіндінің екінші анықтамасын (5.2) еске түсірсек жеткілікті, яғни

$$(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b}|_{\bar{b}} \cdot (\alpha\bar{a}) = \alpha|\bar{b}|_{\bar{b}} \cdot \bar{a} = \alpha(\bar{a}, \bar{b})$$

3^0 қасиетті дәлелдеу үшін, тағы да екінші анықтама және проекция қасиеттерін еске түсірсек жеткілікті.

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = |\bar{c}| Пр_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{c}| Пр_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}| Пр_{\bar{c}}\bar{b} = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$$

5^0 қасиетті теорема түрінде беріп дәлелдейік.

5.1-Теорема. Берілген екі вектордың өзара ортогональ (перпендикуляр) болуы үшін, олардың скаляр көбейтіндісінің нөльге тең – $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ болуы, қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Айталық, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары өзара ортогональ, φ -олардың арасындағы бұрыш. Онда $\cos\varphi = 0$ болады да, скаляр көбейтіндінің анықтамасы $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.

Жеткіліктілігі. Айталық, скаляр көбейтінді – $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Енді $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының ортогональ екендігін дәлелдейік. Бұл кезде екі жағдай болуы мүмкін.

Біріншіден, берілген екі вектордың ең болмағанда біреуі нөльдік вектор болуы, ал нөльдік вектордың бағыты анықталмағандықтан, кез келген векторға ортогональ болады.

Екіншіден, берілген векторлар нөльдік емес, онда $|\bar{a}| > 0, \quad |\bar{b}| > 0.$ Бұл кезде тек $\cos\varphi = 0$, яғни φ -тік бұрыш. Демек, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары өзара ортогональ.

Теореме толық дәлелденді.

Скаляр көбейтіндінің 6^0 қасиеті ретінде немесе алдағы уақытта қажетті болғандықтан келесі теореманы келтірейік.

5.2-Теорема. Егер нөльдік емес, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісі оң (теріс).

$$(\bar{a}, \bar{b}) > 0 \quad ((\bar{a}, \bar{b}) < 0) \qquad (5.3)$$

болса, олардың арасындағы бұрыш сүйір (доғал) болады.

<u>Дәлелдеуі.</u> Берілген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары нөлдік болмағандықтан скаляр көбейтіндінің (5.1) таңбасы $\cos\varphi$ шамасымен байланысты. Егер $\varphi < \frac{\pi}{2}$ болса, $\cos\varphi > 0$ ал, $\varphi > \frac{\pi}{2}$ болғанда $\cos\varphi < 0$.

Теорема дәлелденді.

<u>Скаляр көбейтіндінің координаттық түрі.</u>Декарттық координаталар жүйесінде $\bar{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ және $\bar{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ векторлары берілсін.

Егер i, j, k орттары үшін, скаляр көбейтіндінің анықтамасын қолдансақ,

$$(\bar{i}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{j}) = (\bar{k}, \bar{k}) = 1$$
$$(\bar{i}, \bar{j}) = (\bar{j}, \bar{k}) = (\bar{k}, \bar{i}) = 0 \quad (5.4)$$

болатындығын оңай байқауға болады (4^0, 5^0 қасиеттер).

<u>5.3-Теорема.</u> Егер $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары координаталар арқылы берілген болса, онда олардың скаляр көбейтіндісі

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (5.5)$$

теңдігімен анықталады.

<u>Дәлелденуі.</u> Айталық $\bar{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k = (x_1, y_1, z_1)$,
$\bar{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары берілсін, мұндағы i, j, k -тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінің (5.4) теңдіктерді қанағаттандыратын орттар. Сонымен,

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, x_2 i + y_2 j + z_2 k = x_1 x_2 (i, i) + y_1 x_2 (j, i) + z_1 x_2 (k, i) + x_1 y_2 (i, j) +$$
$$+ y_1 y_2 (j, j) + z_1 y_2 (k, j) + x_1 z_2 (i, k) + y_1 z_2 (j, k) + z_1 z_2 (k, k) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Теорема дәлелденді.

Дербес жағдайда,

$$(\bar{a}, \bar{a}) = \left|\bar{a}^2\right| = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad (5.6)$$

Жоғарыда дәлелденген теоремаларды 5.2 және 5.3 теоремаларды пайдаланып екі вектордың ортоганалдық (перпендикулярлық) шартын алуымызға болады,

$$(\bar{a} \perp \bar{b}): \quad \Leftrightarrow (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = 0 \quad (5.7)$$

Скаляр көбейтіндінің координаттық түрін пайдаланып, олардың арасындағы **бұрыштың косинусын** және векторлардың бір-біріне проекцияларының формулаларын аламыз:

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (5.8)$$

$$Пр_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}; \quad Пр_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (5.9)$$

Анықтама. $\bar{a}$ векторының координат осьтерімен жасайтын α, β, γ бұрыштарының косинустары $\bar{a}$ векторының бағыттаушы косинустары деп аталынады.

$$\cos\alpha = \cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\cos\beta = \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\cos\gamma = \cos(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

екендігі шығады. Демек, вектордың бағыттаушы косинустарының квадраттарының қосындысы бірге тең, яғни $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$ Олай болса, вектордың бағыттаушы косинустары бірлік вектордың координаталары болады: $\bar{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Берілген екі векторға ортогональ вектор. Алдағы уақытта жиі қолданылатын есепті қарастырайық.

Айталық, өзара коллинеарлы емес екі $\bar{a} = (m_1, n_1, p_1)$ және $\bar{b} = (m_1, n_1, p_1)$ векторлары берілсін. Мақсатымыз – осы векторларға ортогональ болатын $\bar{n} = (x, y, z)$ векторын табу.

Ол үшін жоғарыдағы екі вектордың ортогоналдық шартын пайдаланамыз:

$$\bar{a} \perp \bar{n}: \quad \Rightarrow (\bar{a}, \bar{n}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1x + n_1y + p_1z = 0$$
$$\bar{b} \perp \bar{n}: \quad \Rightarrow (\bar{b}, \bar{n}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_2x + n_2y + p_2z = 0 \qquad (5.10)$$

Біз үш белгісізді екі теңдеулер жүйесін алдық. Егер белгісіздердің біреуінің коэффициенті нөлден ерекше болса, мысал үшін $m_1 \neq 0$, онда бірінші теңдеуден x -ті тауып, $x = -\frac{n_1}{m_1}y - \frac{p_1}{m_1}z$ екіншісіне қойсақ,

$$y = \frac{m_2p_1 - m_1p_2}{m_1n_2 - m_2n_1}z$$
$$x = \frac{n_1p_2 - n_2p_1}{m_1n_2 - m_2n_1}z \qquad (5.11)$$

болатындығын көреміз. Демек,

$$\bar{n} = (x, y, z) = \left(\frac{m_2p_1 - m_1p_2}{m_1n_2 - m_2n_1}z, \frac{n_1p_2 - n_2p_1}{m_1n_2 - m_2n_1}z\right) \qquad (5.12)$$

Бұдан үшінші айнымалы z -ке кез келген мән беру арқылы, берілген $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторына ортогональ болатын сансыз көп $\bar{n}$ векторларын аламыз және олардың барлығы өзара коллинеарлы болады.

Сондықтан, дербес жағдайда, $z = m_1 n_2 - n_1 m_2$ деп алсақ,

$$\overline{n} = (x, y, z) = (m_2 p_1 - m_1 p_2, n_1 p_2 - p_1 n_2, m_1 n_2 - n_1 m_2) \quad (5.13)$$

берілген векторларға ортогональ векторды аламыз.

Енді екінші ретті анықтауышты пайдаланып

$$x = \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad (5.14)$$

болатындығын көреміз. Ендеше,

$$\overline{n} = (x, y, z) = \left(\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right) \quad (5.15)$$

Мысал үшін, $\overline{a} = (1, -1, 2)$, $\overline{b} = (3, 4, 1)$ болса, онда

$$\overline{n} = (x, y, z) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-9, 5, 7)$$

Енді, ортогоналдық шартты тексеру арқылы

$$\overline{a} \perp \overline{n}: \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot (-9) + (-2) \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 0$$

$$\overline{b} \perp \overline{n}: \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (-9) + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 7 = 0$$

табылған $\overline{n}$ векторы, берілген $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларына ортогональ.

Мысал. $\overline{F_1} = (3, -4, 5)$, $\overline{F_2} = (2, 1, -4)$, $\overline{F_3} = (-1, 6, 2) = (-1, 6, 2)$ күштеріне тең әсерлі $\overline{F}$ күш әсерінен материалдық нүктені $M(4, 2, -3)$ нүктесінен $M_2(7, 4, 1)$ нүктесіне жеткізу кезіндегі жасалатын жұмыстың шамасын табайық.

Шешуі: Есептің шарты бойынша $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = (4, 3, 3)$, ал жол $\overline{S} = \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (3, 2, 4)$. Онда $\overline{F}$ және $\overline{S}$ векторларының скаляр көбейтіндісі (5.1) жасалынатын жұмыс шамасын береді. Ендеше (5.5) бойынша $A = (\overline{F}, \overline{S}) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 30$.